112. Két labda felpattanása

Ejtsünk labdákat bizonyos magasságból vízszintes felületre. A labdák sohasem pattannak vissza tökéletesen rugalmasan, a visszapattanó labda alacsonyabb magasságot ér el, mint ahonnan elengedtük. Ha két labdát egymás tetejére teszünk, és elengedünk, akkor a felső labda sokkal magasabbra emelkedik a visszapattanás után, mint ahonnan indultak. Ennek az a feltétele, hogy az alsó labdának nagyobb tömegűnek kell lennie, mint a felsőnek.

A jelenség magyarázata az, hogy a visszapattanáskor egymás utáni ütközések sorozata játszódik le; először az alsó labda ütközik a talajjal, és valamekkora sebességgel elindul felfelé, majd a lefelé mozgó felső labda ütközik a már felfelé mozgó alsólabdával. Mivel az alsó tömege nagyobb a felsőénél, az alsó labda egy ütőhöz hasonlóan fellövi a könnyű felső labdát.

Tételezzük fel, hogy a labdák tökéletesen rugalmasak, az egymást követő ütközések pillanatszerűek, és számítsuk ki a visszapattanás utáni sebességüket. Legyen a felső labda tömege m, az alsóé km, és érkezzenek a talajra v sebességgel. Tegyük fel, hogy az alsó labda tömege nagyobb ($k > 1$). Tekintsük a függőlegesen felfelé mutató irányt pozitívnak, és tételezzük fel, hogy a labdák mindvégig ugyanazon függőleges egyenes mentén mozognak.

Az első ütközést követően az alsó labda $+v$ sebességgel mozog felfelé, a felső pedig $-v$ sebességgel lefelé. Írjuk fel a lendület- és az energia-megmaradás törvényét a második ütközésre:

$$kmv - mv = kmv_a + mv_f$$

$$\frac{1}{2}kmv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kmv_a^2 + \frac{1}{2}mv_f^2,$$

ahol v_a-val és v_f-fel jelöltük a labdák felpattanás utáni sebességeit. Az egyenletrendszer fizikailag értelmes megoldása:

$$v_a = \frac{k-3}{k+1}v$$

$$v_f = \frac{3k-1}{k+1}v.$$

Ha az alsó labda háromszoros tömegű ($k = 3$), akkor visszapattanás után az alsó labda megáll ($v_a = 0$), és a felső labda kétszeres sebességgel pattan fel ($v_f = 2v$), így négyszeres magasságra pattan fel. Ebben az esetben a rendszer teljes mozgási energiáját a felső labda kapja meg (negyedakkora tömeg négyszeres energiát kap). Érdekes észrevenni azonban, hogy nem ez a tömegarány jelenti a legmagasabb felpattanást; minél nagyobb az alsó labda tömege a felsőhöz képest, annál inkább növekszik a felső labda végső sebessége, és határátmenetben $v_f \to 3v$, ha $k \to \infty$, vagyis a felső labda sebessége háromszorosnál jobban nem nőhet, legfeljebb kilencszeres magasságra pattanhat vissza.

Érdemes még megvizsgálni a $k = 1$ határesetet is. Ekkor $v_a = -v$ és $v_f = v$, ami azt jelenti, hogy az alsó labda újra a talajjal ütközik, majd rögtön felpattan v sebességgel, és a két azonos tömegű labda lényegében együtt mozog felfelé, mintha csak egy testet ejtettünk volna le. Minden egyéb esetben ($k > 1$) a felső labda lesz gyorsabb. Az alsó labda a második ütközés után vagy felfelé indul ($k > 3$), vagy megáll ($k = 3$), vagy lefelé mozdul el ($3 > k > 1$), ám ebben az esetben a talajjal történő ütközés megváltoztatja a sebességének az irányát. Mindezeket figyelembe véve a probléma teljes megoldása $k \geq 1$ esetén:

$$v_a = \left| \frac{k-3}{k+1} \right| v,$$

$$v_f = \frac{3k-1}{k+1} v.$$

Megjegyzés: Ha a tömegarányra vonatkozó $k \geq 1$ feltétel nem teljesül, vagyis $0 < k < 1$, akkor az alsó labda lesz gyorsabb, és gyors pattogás kezdődik a felső labda és a talaj között. Ekkor már nem tartható a tökéletesen rugalmas ütközést feltételező közelítés, gyors energiaveszteség következik be, és a megfigyelésekkel egyezően a labdák alig pattannak fel.